**Texto

Descripción generada automáticamente con confianza bajaFacultad de Filosofía,**

**Educación y**

**Ciencias Humanas**

**Unidad 3. Métodos decisorios**

**Material teórico 2. Árboles semánticos en LC**

Los árboles semánticos son un método decisorio hipotético-deductivo. Se comienza asignando un valor hipotéticoa un conjunto de fórmulas. A continuación, estas se descomponen en las subfórmulas valuadas de menor complejidad que se deducen de ellas, descendiendo de manera lineal o bifurcada. Hay dos posibles resultados: o bien la deducción da lugar una contradicción generada por la hipótesis (todas las ramas del árbol se cierran) o bien da lugar a, al menos, un ejemploo contraejemploque confirma la hipótesis (al menos una rama del árbol queda abierta). El diagrama toma, así, la forma de un árbol invertido que inicia con las fórmulas valuadas hipotéticamente en la base de su tronco, y las subfórmulas en el resto del tronco y las ramas que surgen de este. Los valores asignados hipotéticamente determinarán qué tipo decisión que se está tomando a través del árbol semántico (decisión de consistencia o de validez semántica).

**1. Árboles semánticos: partes de la prueba**

**Primera parte**

Asignar valores hipotéticos al conjunto de fórmulas o argumento sobre el que se pretende tomar una decisión entre dos conceptos semánticos, según la siguiente tabla:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Decisión semántica** | **Hipótesis** | **Hipótesis en árbol** |
| ¿ es consistente o inconsistente? | **es consistente:**  **alguna estructura *U* da el valor *V* a** | *V* |
|
|
|
| ¿ es tautológica o no? | **no es tautológica:**  **alguna estructura *U* da el valor *F* a** | *F* |
| ¿ es consistente o inconsistente? | **es consistente:**  **alguna estructura *U* da el valor *V* a juntas** | *V 1*  *[…]*  *V n* |
| ¿ es válido o inválido semánticamente? | **es inválido semánticamente:**  **alguna estructura *U* da el valor *V* a juntas y el valor *F* a** | *V 1*  *[…]*  *V n*  *F* |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ¿ implica a o no? | **no implica a :**  **alguna estructura *U* da el valor *V* a y *F* a** | *V*  *F* |
|
| ¿ equivale a o no? | **no equivale a** :  **alguna estructura *U* da valores distintos a y** | **Dos árboles**   |  |  | | --- | --- | | *V* | *F* | | *F* | *V* | |
|

Nótese que un mismo árbol sirve para determinar si es consistente o inconsistente; si es consistente o inconsistente; si es válido o inválido semánticamente; si implica a o no lo hace; y, finalmente, los mismos árboles permiten determinar si equivale a o no lo hace.

**Segunda parte**

Deducir las subfórmulas valuadas que resultan de la **descomposición** de las fórmulas valuadas previamente. Para ello, se debe aplicar recursivamente las siguientes reglas:

|  |  |
| --- | --- |
| **Reglas de deducción lineal** | **Reglas de deducción bifurcada** |
| 1. De V se deduce F 2. De F se deduce V 3. De V se deducen V y V 4. De F se deducen F y F 5. De F se deducen V y F | 1. De F se deducen F o F 2. De V se deducen V o V 3. De V se deducen F o V 4. De V se deducen V y V , o F y F 5. De F se deducen V y F , o F y V |

|  |  |
| --- | --- |
| **Reglas de deducción lineal** | **Reglas de deducción bifurcada** |
| ***R1.***  V  F | ***R6.***  F  F F |
| ***R2.***  F  V | ***R7.***  V  V V |
| ***R3.***  V  V  V | ***R8.***  V  F V |
| ***R4.***  F  F  F | ***R9.***  V  V F  V F |

|  |  |
| --- | --- |
| ***R5.***  F  V  F | ***R10.***  F  V F  F V |

**Nota importante**

La deducción según estas reglas debe repetirse hasta que suceda una de estas dos cosas:

* + **Todas las ramas se cierran**, ya que se han generado contradicciones en todas ellas.
  + **Queda al menos una rama abierta**, ya que no es posible deducir más subfórmulas valuadas y no se ha generado ninguna contradicción en ella

Por ello, es importante revisar si cada paso que se da genera una contradicción con las subfórmulas que pertenecen a la misma rama. Además, de no encontrar contradicciones en las ramas, es importante asegurarse de no obviar subfórmulas aún no descompuestas hasta sus subfórmulas atómicas antes de cerrar la prueba. Para comprender mejor esto, hay que considerar dos conceptos importantes:

|  |
| --- |
| Una **rama** **cerrada**es aquella en la que se genera una contradicción a partir de la hipótesis, es decir, aquella en la que una misma subfórmula aparece como V y como F. |
| Una **rama** **abierta**es aquella en la que ya no se pueden realizar más deducciones aplicando las reglas *R1-R10* y no se ha generado ninguna contradicción a partir de la hipótesis |

**Tercera parte**

Para finalizar el árbol, se debe interpretar los resultados dependiendo de la decisión semántica que desee tomar, según la siguiente tabla:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Decisión semántica** | **Resultados en el árbol** | **Interpretación de resultados** |
| ¿ es consistente o inconsistente? | Todas las ramas se cierran | es inconsistente |
| Hay al menos una rama abierta | es consistente |
| ¿ es consistente o inconsistente? | Todas las ramas se cierran | es inconsistente |
| Hay al menos una rama abierta | es consistente |
| ¿ es válido o inválido semánticamente? | Todas las ramas se cierran | es válido semánticamente |
| Hay al menos una rama abierta | es inválido semánticamente |
| ¿ es tautológica o no? | Todas las ramas se cierran | es tautológica |
| Hay al menos una rama abierta | no es tautológica |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ¿ implica a o no? | Todas las ramas se cierran | implica a |
| Hay al menos una rama abierta | no implica a |
| ¿ equivale a o no? | Todas las ramas de ambos árboles se cierran | equivale a |
| Hay al menos una rama abierta en cualquiera de los árboles | no equivale a |

**2. Ejercicios modelo**

**I. ¿ es tautológica o no?**

Se comienza con la **primera parte** del árbol: la asignación de valores hipotéticos. Se debe asignar el valor *F* a :

1. **F**

El árbol semántico evaluará si hay al menos una estructura *U* que haga falsa a . Nótese que se ha numerado el primer paso. Ahora se inicia la **segunda parte** del árbol: la deducción de nuevos pasos según las reglas *R1-R10***.** Cada nuevo paso debe ser numerado. Según*R5*, se puede deducir dos subfórmulas valuadas de :

1. F

2. **V**  [1]

3. **F**  [1]

Debes marcarse con todo paso al que ya se haya aplicado una de las reglas *R1-R10*. Además, a la derecha de cada nuevo paso, se establece, entre corchetes “[…]”, el número del paso cual se dedujo. Finalmente, recuérdese que deben aplicarse las reglas *R1-R10* recursivamente hasta terminar el árbol. Más adelante se ofrecerán tips para saber qué pasos es recomendable desarrollar antes que otros. Por ahora, solo se operará según el orden en el que aparecieron los nuevos pasos. Aplíquese *R1* al paso 2:

1. F

2. V [1]

3. F [1]

**4. F** [2]

Ahora aplíquese *R4* al paso 3:

1. F

2. V [1]

3. F [1]

4. F [2]

**5. F** [3]

**6. F** [3]

Para elegir qué paso desarrollar primero -4, 5 o 6- se puede aplicar este tip: procúrese aplicar, primero, las reglas *R1-R5* y, después, las reglas *R6-R10*. En otras palabras: siempre que sea posible, opérense primero las deducciones lineales antes que las bifurcadas. Así, se comienza con la aplicación de *R2* a los pasos 5 y 6:

1. F

2. V [1]

3. F [1]

4. F [2]

5. F [3]

6. F [3]

**7. V** [5]

**8. V** [6]

Finalmente, aplíquese *R6* a 4:

1. F

2. V [1]

3. F [1]

4. F [2]

5. F [3]

6. F [3]

7. V [5]

8. V [6]

**9. F** [4] **10.** **F** [4]

Al revisar los valores resultantes de esta última deducción, se encuentra una contradicción en cada rama. Así, ambas se cierran y, para mostrarlo, se consigna “**✕**” al final de cada una:

1. F

2. V [1]

3. F [1]

4. F [2]

5. F [3]

6. F [3]

7. V [5]

8. V [6]

9. F [4] 10. F [4]

**✕ ✕**

Ya que todas las ramas del árbol se cerraron, el árbol ha concluido. Se llega, así, a la **tercera parte** de la prueba: interpretar el resultado. La valuación hipotética de como falsa da lugar, a través de un proceso deductivo, solo contradicciones; por ello, toda estructura *U*  es modelo de y, por tanto, **es tautológica.**

**II. ¿ es consistente o inconsistente?**

Se establece, primero, la hipótesis que ayudará a determinar si es consistente o no:

**1. V**

Ahora, se desarrolla la segunda parte del árbol hasta que se dé alguna de las condiciones para concluirla:

1. V

2. F [1]

3. V [2]

4. F [2]

5. V [3]

6. V [3]

7. V [4]

8. F [5] 9. V ( [5]

**✕** 10. V [9]

11. V [9]

12. F [10]

13. F [11]

14. **V** [7] 15. **F** [7]

**✕** 16. **F** [7]

**Abierta**

La rama abierta indica que al menos una estructura *U* es modelo de , es decir, que  **es consistente**. A partir de una rama abierta en un árbol, se puede reconstruir la fila de una tabla de verdad según una estructura que da a las fórmulas analizadas los valores que asignados hipotéticamente en la primera parte del árbol. Estas reconstrucciones son **ejemplos**o **contrejemplos** de las propiedades semánticas analizadas en cada caso:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Decisión semántica** | **Hipótesis en el árbol** | **Fila de tabla de verdad a partir de una reconstruida desde una rama abierta del árbol** |
| ¿ es consistente o inconsistente? | V | Ejemplo de |
| ¿ es consistente o inconsistente? | *V 1*  *[…]*  *V n* | Ejemplo de |
| ¿ es válido o inválido semánticamente? | *V 1*  *[…]*  *V n*  *F* | Contraejemplo de |
| ¿ es tautológica o no? | F | Contraejemplo de |
| ¿ implica a o no? | V  F | Contraejemplo de |
| ¿ equivale a o no?  y | Dos árboles   |  |  | | --- | --- | | V | F | | F | V | | Contraejemplodeo |

En el curso, para todo árbol que tenga al menos una rama abierta, será necesario reconstruir un **ejemplo**o **contrajemplo** del conjunto de fórmulas analizadas, dependiendo de la decisión semántica que se esté tomando. Para ello, se debe reconstruir la fila de la tabla que correspondiente a los valores asignados a las subfórmulas atómicas en una rama abierta. Así, el ejemplo de sería:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* |  |
| V | F | F | V V V V F V V F V V F F F V F |

En caso de que alguna de las subfórmulas atómicas no aparezca valuada en la rama abierta, se puede asignar cualquier valor a dicha letra oracional en el ejemplo o contraejemplo.

**III. ¿ implica a o no?**

Se asumirá, como hipótesis, que no implica a ; por ello, el árbol iniciará con los valores que cada fórmula debería asumir para que esto suceda:

**1. V**

**2. F** )

A partir de aquí, simplemente se tiene que comenzar con la segunda parte de la prueba hasta que se dé alguna de las condiciones para clausurarla:

1. V

2. F )

**3. V**  [1]

**4. V** [1]

**5. F** [2] **6.** **F** [2]

**7. F** [5]

**✕ 8. V** **9.** **V**

**Abierta**

A pesar de no haber desarrollado el paso 10, se puede decir que la prueba concluye con el paso 9: la rama de la cual se dedujo no presenta ninguna contradicción ni tiene más pasos a los cuales se pueda aplicar las reglas *R1-R10*. Por ello, la hipótesis se acepta. Por lo tanto, hay al menos una estructura *U* que es modelo de y no de y, por ello,  **no implica a** . Un contraejemploque se reconstruye a partir de la rama abierta es el siguiente:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* |  |  |
| V | F | F | V V V F V V | V V F F F |

Nótese que se asignó el valor *F* a *R* aleatoriamente; esto se debe a que *R* no aparece en la rama abierta. Otro contraejemplo resultaría si se le asignar el valor *V*, ya que cada uno surge de una estructura *U* distinta.

**IV. ¿ equivale a o no?**

Por tratarse de una decisión de equivalencia, se asume que no equivale a y, por tanto, podría necesitarse desarrollar dos árboles. El primero descartará la posibilidad de que pueda ser V y F al mismo tiempo; el segundo descartará la posibilidad de la combinación inversa de valores. Se comienza por el primero:

**1. V** ()

**2. F**

**3. V** [2]

**4. F**  [2]

**5. F** [3]

**6. V**  [1] **7.** **V** [1]

**8. F** [6] **✕**

**9. F**  [8]

**10. F** [8]

**11. V** [9]

**12. F** [5] **13. F**  [5]

**✕** **14.** **V**  [13]

**✕**

Todas las ramas del primer árbol se cierran. Solo por eso, se desarrolla el segundo:

**1.** **F** ()

**2. V**

**3. F** [1]

**4. F** [1]

**5. V** [3]

**6. F** [2] **7. V** [2]

**8.** **V**  [6] **✕**

**9.** **V**  [8]

**10.** **V**  [8]

**11.** **F** [10]

**12. V** [5] **13.** **V** [5]

**14.** **F** [12] **✕**

**✕**

Todas las ramas del segundo árbol también se cierran. Así, se rechaza la hipótesis: todas las estructuras *U* que modelan a también modelan a y visceversa; por tanto,  **equivale a** *.*

**V. ¿es válido semánticamente o no?**

Se debe tomar la hipótesis de que no es válido. Se decidirá si es posible que a y se les asigne el valor *V* y, a , el valor *F* al mismo tiempo:

**1. V**

**2. V**

**3. V**

**4. F**

**5. V** [2]

**6. V**  [2]

**7. F** [5]

**8. F** [1] **9.** **V** [1]

**10. V** [8] **✕**

**11. F** [3] **12.** **V** [3]

**✕**

**13. F**  [4]  **14. F**  [4]

**✕**

**15. V**  [12] **16. V**  [12]

**✕ Abierta**

Al quedar una rama abierta, la hipótesis se acepta: al menos una *U* es modelo de y , pero no de . Por ello,  **es inválido semánticamente.** Finalmente, se elabora un contraejemplo:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* | *S* | *T* |  |  |  |  |
| F | V | F | V | V | F V V F | V F V V | V V F V V | F F V |

**VI. ¿es consistente o inconsistente?**

Se asumirá que es consistente. será consistente, si al menos, una estructura *U* asigna el valor *V* a sus fórmulas conjuntamente. Se decidirá si esta hipótesis se cumple o no:

**1. V**

**2. V** (

**3. V**

**4. V** [1]

**5. V** [1]

**6. F**  [5]

**7. V**  [3]

**8. V**  [3]

**9. F**  [8]

**10. F** [2] **11.** **V** [2]

**12. V** [10]

**✕ 13. V**  [11] **15.** **F** [11]

**14.** **V**  [11] **✕**

**✕**

Todas las ramas se cierran y, por tanto, la hipótesis se rechaza: no hay una estructura *U* que modele a y conjuntamente. Por ello, **es inconsistente.**

|  |
| --- |
| **Tips para la deducción en árboles semánticos**   1. Dar prioridad a la aplicación de *R1-R5* sobre la de *R6-R10* 2. Dar prioridad a la deducción de subfórmulas que cerrarán inmediatamente una rama 3. Si solo se puede aplicar *R6-R10*, dar prioridad a las fórmulas más complejas |

**Anexo**

**Cuadro de decisiones en árboles semánticos**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Decisión semántica** | **Hipótesis** | **Hipótesis en árbol** | **Resultados en el árbol** | **Interpretación de resultados** |
| ¿ es consistente o inconsistente? | **es consistente:**  **alguna estructura *U* da el valor *V* a** | *V* | Todas las ramas se cierran | es inconsistente |
| Hay al menos una rama abierta | es consistente |
| ¿ es consistente o inconsistente? | **es consistente:**  **alguna estructura *U* da el valor *V* a juntas** | *V 1*  *[…]*  *V n* | Todas las ramas se cierran | es inconsistente |
| Hay al menos una rama abierta | es consistente |
| ¿ es válido o inválido semánticamente? | **es inválido semánticamente:**  **alguna estructura *U* da el valor *V* a juntas y el valor *F* a** | *V 1*  *[…]*  *V n*  *F* | Todas las ramas se cierran | es válido semánticamente |
| Hay al menos una rama abierta | es inválido semánticamente |
| ¿ es tautológica o no? | **no es tautológica:**  **alguna estructura *U* da el valor *F* a** | *F* | Todas las ramas se cierran | es tautológica |
| Hay al menos una rama abierta | no es tautológica |
| ¿ implica a o no? | **no implica a :**  **alguna estructura *U* da el valor *V* a y *F* a** | *V*  *F* | Todas las ramas se cierran | implica a |
| Hay al menos una rama abierta | no implica a |
| ¿ equivale a o no? | **no equivale a** :  **alguna estructura *U* da valores distintos a y** | **Dos árboles**   |  |  | | --- | --- | | *V* | *F* | | *F* | *V* | | Todas las ramas de ambos árboles se cierran | equivale a |
| Hay al menos una rama abierta en cualquiera de los árboles | no equivale a |